Sección 0.4
Ecuaciones

Universidad de Puerto Rico
Recinto Universitario de Mayagüez
Facultad de Artes y Ciencias
Departamento de Ciencias Matemáticas

Contenido

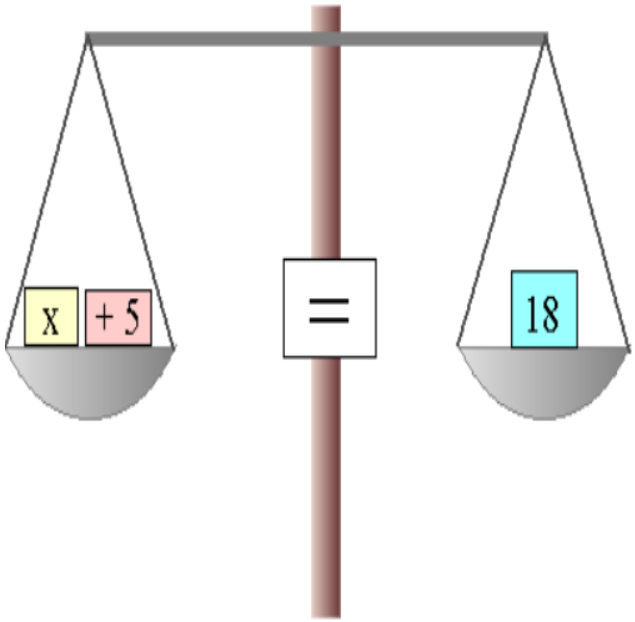
1. Ecuaciones Lineales

2. Ecuaciones Cuadráticas

3. Otros Tipos de Ecuaciones
   - Ecuaciones que envuelven variable en el denominador
   - Ecuaciones con radicales
   - Ecuaciones con valor absoluto

Ecuaciones

¿Para qué sirven las ecuaciones?
Las ecuaciones permiten pasar del mundo real donde se observa el fenómeno al mundo de las matemáticas.



Ecuaciones

Una **ecuación** es una igualdad de dos expresiones matemáticas que incluye por lo menos una variable que representa una cantidad desconocida.

Ejemplos:

- $6x + 8 = 9$
- $x + 5 = 3x + 6$
- $x^2 + 2 = 6$
- $x^2 + 3x + 8 = 0$
- $\sqrt{x} + 2 = 0$
- $|x| + 2 = 0$

Ecuaciones

Soluciones: Son los valores (números) que deben tomar las variables (letras) para que la igualdad se cumpla.

Ejemplo: $\frac{1}{6}$ es una solución para $6x + 8 = 9$

Resolver una ecuación

- Resolver una ecuación es el proceso de encontrar todas las soluciones.

  Ejemplo: Las soluciones de $x^2 = 25$ son $x = 5$ y $x = -5$.

Ecuaciones Equivalentes

- Dos ecuaciones son equivalentes si tienen exactamente las mismas soluciones.

  Ejemplo: $x^2 = 9$, y $x = -3$ no son equivalentes.

Propiedades de Igualdad

- $A = B \iff A + C = B + C$
- $A = B \iff CA = CB \quad (C \neq 0)$

Ecuaciones Lineales

Una **ecuación lineal** es una igualdad en la que intervienen términos acompañados de una variable (letra) con exponente uno, el signo $=$ y términos independientes (números), se puede expresar de la forma:

$$ax + b = 0$$

donde a y b son números reales.

Ejemplos

Determine si las siguientes ecuaciones son lineales.

(a) $10 = -2x$

(b) $\frac{2}{x} - 5 = 3$

(c) $x^2 + 2 = 6$

(d) $3x + 1 = 5(2 - x)$

Ejemplos

(a) Resuelva la ecuación $8\left(2x-3\right)-16=18-2\left(x+2\right)$

Ecuaciones: Despejar para una variable indicada

Ejemplo: $A = \dfrac{-FMn}{k^2}$, resolver para n

Ecuaciones: Despejar para una variable indicada

Ejemplo: $B = \dfrac{F}{S - V}$, resolver para S

Ecuaciones Cuadráticas

Una **ecuación cuadrática** es una expresión que se puede expresar de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b y c son números reales con $a \neq 0$.

Ecuaciones Cuadráticas

Algunas ecuaciones cuadráticas se pueden resolver por factorización y usando la siguiente propiedad de los números reales.

Propiedad del Producto Cero:

$$AB = 0 \text{ si y sólo si } A = 0 \text{ ó } B = 0$$

Ejemplo: Resuelva la ecuación $x^2 - 10x + 21 = 0$

Ecuaciones Cuadráticas Simples

Las soluciones de la ecuación cuadrática $x^2 = c$, donde $c \geq 0$ son:

$$x = \sqrt{c} \quad \text{y} \quad x = -\sqrt{c}.$$

Ejemplo: Resuelva la ecuación cuadrática simple $3x^2 - 21 = 0$

Completar el Cuadrado

Para convertir $x^2 + bx$ en un cuadrado perfecto, debemos sumar $\left(\frac{b}{2}\right)^2$.
Esto resulta en un cuadrado perfecto, el cual se ve de la siguiente manera:

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

Ejemplo

Resuelva la siguiente ecuación cuadrática usando la técnica de completar el cuadrado:

$$x^2 - 8x + 6 = 15$$

Completar el Cuadrado

Cuando la ecuación cuadrática tiene la forma $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 1$, se divide toda la ecuación entre a y obtenemos:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Con la ecuación escrita de esta forma, podemos trabajar como en el ejemplo anterior.

Ejemplo

Resuelva la siguiente ecuación cuadrática usando la técnica de completar el cuadrado:

$$2x^2 + 5x + 2 = 3$$

Fórmula Cuadrática

Las soluciones o raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$, son:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo

Resuelva la siguiente ecuación cuadrática utilizando la **fórmula cudrática**:

$$2x^2 + 4x = 1$$

Discriminante de una ecuación cuadrática

El **discriminante** de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ (con $a \neq 0$) es:

$$D = b^2 - 4ac.$$

1. Si $D > 0$, entonces la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.
2. Si $D = 0$, entonces la ecuación tiene exactamente una solución real.
3. Si $D < 0$, entonces la ecuación no tiene solución real.

Ejemplo

Determine cuántas soluciones reales tiene $5x^2 - 2x + 3 = 0$.

Ecuaciones que envuelven variable en el denominador

Pasos para resolver:

- Factorizar cada término (numerador y denominador).
- Hallar el mínimo común denominador de todas las fracciones (MCD).
- Multiplicar a ambos lados de la ecuación por el MCD.
- Resolver la ecuación resultante.
- Verificar que las soluciones conseguidas en el paso anterior no hagan cero el denominador.

Ejemplo

Resuelva la ecuación

$$\frac{3}{x-3} + \frac{5}{x-7} = \frac{x^2-20}{x^2-10x+21}$$

Ecuaciones con radicales

Pasos para resolver

- Reescribir con el radical solo a un lado de la ecuación.
- Elevar ambos lados de la ecuación al índice del radical.
- Resolver la ecuación resultante.
- Verificar que las soluciones conseguidas en el paso anterior. Pueden surgir soluciones extrañas (que no son solución de la ecuación original).

Ejemplo

Resuelva la ecuación:

$$\sqrt{3x-2}+2=x$$

Ecuaciones con valor absoluto

Pasos para resolver:

- Aislar la expresión que tenga el valor absoluto.
- Verificar si tiene sentido, por ejemplo $|x| = -3$. Sabemos que esto no es posible. Por ende, no tiene solución.
- La idea es reemplazar la ecuación por dos casos:

$$|A(x)| = B(x) \Rightarrow \begin{cases} A(x) = B(x) \\ A(x) = -B(x) \end{cases}$$

- Resolver ambas ecuaciones independientemente.
- Verificar ambas respuestas.

Ejemplo

Resuelva la ecuación:

$$2\left|4-\frac{5}{2}x\right|+6=18$$

Ejemplo

Ejemplo